Über eine allgemeine Ungleichung zwischen Mittelwerten.

Von Börge Jessen in Kopenhagen.

Es bezeichne $f=f(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ meßbare und nichtnegative Funktion. Ist nun p eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet man als *Mittelwert* p^{ter} *Ordnung* $M_p(f)$ der Funktion f, falls $p \neq 0$, die Größe

$$M_p(f) = \left[\int_0^1 f^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

falls $p=0$, die Größe

$$M_0(f) = e^{\int_0^1 \log f \, dx}.$$

Wir wollen im Folgenden nur solche Funktionen f betrachten, für welche $M_p(f)$ für jeden Wert von p definiert ist, d. h. für welche f^p für jeden (positiven oder negativen) Wert von p summierbar ist; dann muß auch $\log f$ summierbar sein.[1]) Nun gilt der wichtige Satz:

Sind p und q reelle Zahlen, so ist dann und nur dann

(1) $$M_p(f) \leqq M_q(f)$$

[1]) Diese Funktionenklasse besitzt die wichtige Eigenschaft, daß Produkt und Quotient von Funktionen aus der Klasse immer wieder zur Klasse gehören. Wir hätten auch weniger umfassende Funktionenklassen betrachten können, etwa die Klasse aller beschränkten, meßbaren Funktionen mit positiver unterer Grenze. Wie immer, wenn von meßbaren Funktionen die Rede ist, sind äquivalente Funktionen (das sind solche, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden) nicht als verschieden anzusehen; so ist etwa die Aussage, daß f konstant ist, so zu verstehen, daß f mit einer Konstanten äquivalent ist. Diese Bemerkung wird im Folgenden nicht wiederholt.

für jede Funktion f der betrachteten Art, wenn $p \leqq q$ ist. Ferner gilt in der Ungleichung (1) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder $p=q$, oder $p<q$ und f konstant ist.*[2])

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

Die Mittelwerte $M_p(f)$ bilden ihrer Größe nach eine geordnete Menge, und zwar ist die Ordnung dieselbe für die Mittelwerte wie für die zugehörigen Exponenten p.

Für jeden festen Wert von p gilt offenbar $M_p(f) \leqq M_p(g)$, wenn $f \leqq g$.

Außer der Ungleichung (1), die wir im Folgenden als die *Jensensche Ungleichung*[3]) bezeichnen wollen, sind mehrere Ungleichungen zwischen den Mittelwerten $M_p(f)$ bekannt. Die wichtigsten sind die Ungleichungen von Hölder und Minkowski, zu denen wir unten zurückkehren wollen. Wir wollen nämlich zeigen, wie man durch geeignete Erweiterung des Begriffs des Mittelwertes p^{ter} Ordnung zu einer Ungleichung gelangen kann, die sowohl die Jensensche als auch die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung enthält. Diese Erweiterung wird möglich, indem wir Funktionen von mehreren Variablen heranziehen.

Wir betrachten Funktionen $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die im Einheitswürfel $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq 1$ meßbar und nichtnegativ sind. Auf diesen Fall läßt sich die obige Definition des Mittelwertes $M_p(f)$ sofort übertragen; man hat dazu nur die Integration über das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ durch die Integration über den Einheitswürfel $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq 1$ zu er-

---

[2]) In vollem Umfang ist dieser Satz wohl zuerst von Jensen bewiesen worden, vgl. J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta mathematica*, **30** (1906), S. 175—193; einen einfacheren Beweis findet man bei B. Jessen, Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels, *diese Acta*, **5** (1931), S. 108–116; hier wird auch die Stetigkeit von $M_p(f)$ als Funktion von p bewiesen. — Ich benutze die Gelegenheit, den Hinweisen in der letztgenannten Arbeit noch die folgenden hinzuzufügen: K. Knopp, Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern, *Mathematische Zeitschrift*, 30 (1929), S. 387—403. — M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Mathematics*, **7** (1930), S. 71—79. — A. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, (6) 12 (1930), S. 388—391. — B. de Finetti, Sul concetto di media, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **2** (1931), S. 369—396. Man findet in diesen Arbeiten ähnliche Entwicklungen wie in meiner Arbeit.

[3]) Auch andere Ungleichungen gehen in der Literatur unter diesem Namen.

setzen. Wir wollen im Folgenden nur solche Funktionen f betrachten, für welche $M_p(f)$ für jeden Wert von p definiert ist; dazu ist es, wie oben, erforderlich, daß f^p für jeden Wert von p summierbar ist.[1]) Denselben Mittelwert $M_p(f)$ erhält man nun auch in einer anderen Weise, indem man nämlich zunächst den Mittelwert p^{ter} Ordnung in Bezug auf eine der Variablen, etwa x_1, bildet, sodann von der so entstandenen Funktion der Variablen $x_2, \ldots, x_n$ den Mittelwert p^{ter} Ordnung in Bezug auf eine von ihnen, etwa x_2, bildet und so weiter, bis schließlich alle Variablen berücksichtigt sind. Die gewählte Permutation der Variablen ist offenbar für das Ergebnis gleichgültig.

Die genannte Erweiterung des Begriffs des Mittelwertes p^{ter} Ordnung besteht nun darin, daß wir für irgend eine Permutation der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dieselben Operationen ausführen wie eben, jetzt aber mit *beliebigen*, nicht notwendig gleichen, Exponenten. Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige reelle Zahlen, und ist $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ irgendeine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so bezeichnen wir den entsprechenden Mittelwert von f mit

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \cdots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f).$$

Dabei sind die angeführten Operationen (Mittelwertbildungen) von rechts nach links auszuführen, und es bedeutet allgemein M_p^x die Bildung des Mittelwertes p^{ter} Ordnung in Bezug auf die Variable x. Die Operationen sind stets ausführbar, wenn f nur den obigen Bedingungen genügt. Sind alle Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gleich, etwa $= p$, so ist, wie schon bemerkt, der Mittelwert unabhängig von der gewählten Permutation und gleich dem oben definierten Mittelwert $M_p(f)$. Für beliebige Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liegt der Mittelwert immer zwischen den beiden Mittelwerten $M_p(f)$, die man erhält, wenn man p gleich der kleinsten bzw. größten der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wählt.

Die allgemeine Frage, die wir in der vorliegenden Arbeit behandeln wollen, ist nun die folgende:

Welche Bedingungen müssen die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *und* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *und die Permutationen* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *und* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *erfüllen, damit die Ungleichung*

$$(2) \qquad M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \cdots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \leqq M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \cdots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f)$$

für jede Funktion f der betrachteten Art bestehe? Ferner: *Für welche*

Funktionen f gilt, falls diese Bedingungen erfüllt sind, in der Ungleichung (2) *das Gleichheitszeichen?*

In dem Spezialfall $n = 1$ wurde diese Frage durch den obigen Satz von JENSEN beantwortet. Ein weiterer Spezialfall wird durch den folgenden Satz geliefert, der sich auf den Fall $n = 2$ bezieht:

Sind p und q reelle Zahlen, so gilt dann und nur dann

$$M_q^y\, M_p^x(f) \leqq M_p^x\, M_q^y(f) \tag{3}$$

für jede im Quadrate $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ *gegebene Funktion* $f = f(x, y)$ *der betrachteten Art, wenn* $p \leqq q$ *ist. Ferner gilt in der Ungleichung* (3) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder* $p = q$, *oder* $p < q$ *und* $f(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y)$ *ist.*

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

Zwei Mittelwertbildungen M_p^x und M_q^y nach verschiedenen Variablen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn die zugehörigen Exponenten p und q gleich sind. Ist dies nicht der Fall, so erhält man den größeren Mittelwert, wenn man den größeren Exponenten bevorzugt, d. h. wenn man zuerst die Mittelwertbildung nach derjenigen Variablen vornimmt, zu der der größere Exponent gehört.

Die Ungleichung (3) ist, wie es aus dem Folgenden mit aller Deutlichkeit hervorgehen wird, als eine recht naheliegende Verallgemeinerung der Minkowskischen Ungleichung anzusehen. Wir wollen sie deshalb im Folgenden kurz als die *Minkowskische Ungleichung* bezeichnen. Der Spezialfall $p = 0$, $q = 1$ ist, wie es sich ebenfalls später zeigen wird, eine recht unmittelbare Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung.

Wir warten vorläufig mit dem Beweis der Ungleichung (3) und zeigen zunächst, wie man mit Hilfe der beiden Ungleichungen (1) und (3) unser allgemeines Problem hinsichtlich der Aufstellung aller Ungleichungen der Form (2) vollständig lösen kann. Die Lösung läßt sich in verschiedenen Weisen formulieren; am interessantesten scheint mir die folgende Formulierung zu sein:

Es gibt keine Ungleichung der Form (2), *die nicht als triviale Folgerung der Jensenschen und der Minkowskischen Ungleichung anzusehen ist.* Dies ist so zu verstehen: *Gilt eine Ungleichung der Form* (2) *für alle Funktionen* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *der betrachteten Art, so ist es immer möglich von dem Mittelwert*

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \cdots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}}\, M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f)$$

zu dem Mittelwert

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \dots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f)$$

durch sukzessive Anwendung der folgenden beiden Operationen zu gelangen: a) *Vergrößerung des Exponenten in einer der Mittelwertbildungen, ohne Änderung der Reihenfolge der Mittelwertbildungen.* b) *Vertauschung von zwei nebeneinanderstehenden Mittelwertbildungen, wenn dadurch ein größerer Exponent bevorzugt wird, oder wenn die betreffenden Exponenten einander gleich sind.*

Es ist klar, daß durch Änderungen dieser Art der Mittelwert niemals verkleinert wird. Daß wirklich jede Ungleichung (2) in dieser Weise zu erhalten ist, wird sich aus dem Beweis des folgenden Satzes ergeben; dieser Satz stellt die Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (2) in einer anderen Form dar, die einer Nachprüfung unmittelbarer zugänglich ist.

Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Ungleichung

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \dots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \leqq M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \dots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) \tag{2}$$

für jede Funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der betrachteten Art ist das Bestehen der folgenden Ungleichungen zwischen den Exponenten $p_1, p_2, \dots, p_n$ und $q_1, q_2, \dots, q_n$: α) Für jeden Wert von i soll $p_i \leqq q_i$ sein. β) Für jedes Paar von Zahlen i, j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ in der Ordnung $\dots i \dots j \dots$ und in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ in der Ordnung $\dots j \dots i \dots$ auftritt, soll $p_i \leqq q_j$ sein.

Wir beweisen zunächst, daß die aufgestellten Bedingungen α) und β) für das Bestehen der Ungleichung (2) notwendig sind. Hierzu bezeichnen wir mit $g = g(x)$ eine beliebige für $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, die unsere gewöhnlichen Bedingungen erfüllt, und wählen zunächst

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_i).$$

Dann besagt die Ungleichung (2), daß

$$M_{p_i}(g) \leqq M_{q_i}(g),$$

und da dabei g beliebig war, muß nach der Jensenschen Ungleichung $p_i \leqq q_i$ sein. Hiermit ist also die Notwendigkeit der Bedingung α) bewiesen.

Der Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung β) ist ebenso leicht, aber trotzdem ein Hauptpunkt der vorliegenden

Arbeit. Wir gehen ähnlich vor, aber wählen diesmal

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_i + x_j) & \text{für } x_i + x_j \leqq 1, \\ g(x_i + x_j - 1) & \text{für } x_i + x_j > 1. \end{cases}$$

Dann ist nach unserer Voraussetzung über das Zahlenpaar i, j, wie leicht nachzurechnen,

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) = M_{p_i}(g)$$

und entsprechenderweise

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) = M_{q_j}(g).$$

Denn bei der ersten Mittelwertbildung trifft man von den beiden Operationen $M_{p_i}^{x_i}$ und $M_{p_j}^{x_j}$ zuerst die Operation $M_{p_i}^{x_i}$, während man bei der zweiten Mittelwertbildung von den beiden Operationen $M_{q_i}^{x_i}$ und $M_{q_j}^{x_j}$ zuerst der Operation $M_{q_j}^{x_j}$ begegnet. Die Ungleichung (2) besagt also, daß

$$M_{p_i}(g) \leqq M_{q_j}(g),$$

und da dabei g beliebig war, muß $p_i \leqq q_j$ sein.

Der Beweis dafür, daß die Bedingungen α) und β) für das Bestehen der Ungleichung (2) hinreichend sind, wird gleichzeitig den Beweis unseres Hauptsatzes in der zuerst gegebenen Formulierung enthalten. Wir werden nämlich unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen α) und β) erfüllt sind, den Beweis der Ungleichung (2) dadurch erbringen, daß wir eine Vorschrift für die Umformung des Mittelwertes

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \tag{4}$$

in den Mittelwert

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) \tag{5}$$

durch sukzessive Anwendung der beiden obigen Operationen a) und b) angeben. Diese Operationen haben ja, wie oben bemerkt wurde, die Eigenschaft, daß sie den Mittelwert niemals verkleinern. Sind die beiden Permutationen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ gleich, so daß nur die Bedingung α) in Frage kommt, dann ist die Umformung unmittelbar vorzunehmen; man hat nur die Operation a) anzuwenden, indem man sukzessiv die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ersetzt. Wir können uns also im Folgenden auf den interessanteren Fall beschränken, wo die beiden Permutationen verschieden sind.

Die Bedingungen α) und β) drücken aus, daß jedes $p_i \leqq$ einiger der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sein soll, nämlich erstens $\leqq q_i$ und zweitens $\leqq q_j$ für jedes j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *nach* i, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *vor* i auftritt. Es sei mit r_i die kleinste derjenigen der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bezeichnet, von denen wir somit wissen, daß sie $\geqq p_i$ sind. Dann ist offenbar für jeden Wert von i

$$p_i \leqq r_i \leqq q_i.$$

Ferner gilt für jedes Paar von Zahlen i, j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots j \ldots$ und in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots j \ldots i \ldots$ auftritt, die Ungleichung

$$r_i \leqq r_j; \tag{6}$$

denn entweder ist $r_j = q_j$, dann ist die Ungleichung klar nach der Definition von r_i, oder es ist $r_j = q_k$, wobei k eine Zahl bedeutet, die in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *nach* j, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *vor* j auftritt. Daraus folgt aber, wenn wir das Zahlenpaar i, k betrachten, daß dieses Paar in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots k \ldots$, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots k \ldots i \ldots$ auftritt, so daß die Ungleichung auch in diesem Fall richtig ist.

Unsere erste Änderung des Mittelwertes (4) ist eine Anwendung der Operation a) und besteht darin, daß wir sukzessiv die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ersetzen; hierdurch gelangen wir zu dem Mittelwert

$$M_{r_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{r_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{r_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f). \tag{7}$$

Von diesem Mittelwert gelangen wir nunmehr durch Anwendung der Operation b), also durch sukzessive Vertauschung von Operationen nach einem sofort anzugebenden Gesetz, zu dem Mittelwert

$$M_{r_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{r_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{r_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f). \tag{8}$$

Dabei gehen wir folgendermaßen vor. Nach Voraussetzung gibt es eine gewisse Anzahl von Zahlenpaaren i, j, die in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots j \ldots$, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots j \ldots i \ldots$ auftreten. Es sei m die Anzahl solcher Zahlenpaare i, j. Dann ist es bekanntlich möglich, durch m sukzessive Vertauschungen von *nebeneinanderstehenden* Zahlen von der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ zu der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ zu gelangen, und dabei ist m die kleinstmögliche Anzahl von solchen Vertauschungen. Bei jeder Vertauschung wird gerade eines von den m Zahlenpaaren i, j berücksichtigt. Durch diese Reihe von m Vertauschungen ist nun auch eine Vorschrift für die Umformung des Mittelwertes (7) in den Mittelwert (8) gegeben; und dabei sind die auszuführenden Vertauschungen wegen der Relation (6) immer Operationen der Form b).

In dem letzten Mittelwert (8) ersetzen wir nun sukzessiv die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ durch die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, wodurch wir zu dem Mittelwert (5) gelangen. Das sind wieder Operationen von der Form a). Im Ganzen sind wir also auf diese Weise durch sukzessive Anwendung der beiden Operationen a) und b) von dem Mittelwert (4) zu dem Mittelwert (5) gelangt.

Hiermit ist unser allgemeiner Satz bewiesen. Gleichzeitig haben wir eine prinzipielle Beantwortung der Frage gewonnen, *für welche Funktionen f das Gleichheitszeichen in der Ungleichung* (2) *gilt.* Denn der obige Beweis gibt ja gerade eine Vorschrift für die Zurückführung einer beliebigen Ungleichung dieser Form auf die Jensensche und die Minkowskische Ungleichung, für welche die Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens bekannt sind.

*

Das Einzige, was noch übrig ist, ist das genauere Studium der Ungleichung (3). Bei dieser Untersuchung ist es bequem, den Buchstaben f für Funktionen *einer* Variablen zu reservieren. Wir formulieren deshalb den Satz, den wir zu diskutieren haben, wie folgt:

Es sei $p < q$ und $g = g(x, y)$ eine Funktion, die unseren gewöhnlichen Bedingungen genügt. Dann gilt die Ungleichung

$$M_q^y M_p^x(g) \leqq M_p^x M_q^y(g), \tag{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $g(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y)$.[4])

Wie oben gesagt, ist die Ungleichung (3) als eine recht naheliegende Verallgemeinerung der Minkowskischen Ungleichung anzusehen; wir haben sie deshalb kurz als die Minkowskische

[4]) Diese Formulierung ist nur scheinbar spezieller als die obige.

Ungleichung bezeichnet. Diesen Sachverhalt wollen wir nun näher erörtern.

Wählt man in der Ungleichung (3) speziell $p=1$ und $g(x, y)=f_1(y)$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $g(x, y)=f_2(y)$ für $\frac{1}{2}<x \leqq 1$, so ergibt sich für $q>1$ die Ungleichung

$$(9) \qquad M_q\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \leqq \frac{M_q(f_1)+M_q(f_2)}{2},$$

oder kürzer, wegen der Homogeneität der betrachteten Mittelwerte,

$$(10) \qquad M_q(f_1+f_2) \leqq M_q(f_1)+M_q(f_2).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f_1/f_2 konstant ist. In entsprechender Weise ergibt sich aus (3) für $q=1$, daß für $p<1$ die Ungleichung

$$(11) \qquad \frac{M_p(f_1)+M_p(f_2)}{2} \leqq M_p\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)$$

oder

$$(12) \qquad M_p(f_1)+M_p(f_2) \leqq M_p(f_1+f_2)$$

besteht. Das Gleichheitszeichen gilt wieder dann und nur dann, wenn f_1/f_2 konstant ist. Die beiden Ungleichungen (10) und (12) bilden zusammen die übliche Formulierung der Minkowskischen Ungleichung.

Aus den Ungleichungen (10) und (12) kann man nun andererseits die allgemeinere Ungleichung (3) herleiten. Hierzu mag der Hinweis genügen, daß die Ungleichung (3) in dem Falle $p=1$, also die Ungleichung

$$(13) \qquad M_q^y\left(\int_0^1 g(x, y)\, dx\right) \leqq \int_0^1 M_q^y(g(x, y))\, dx,$$

in genau demselben Verhältnis zu der Ungleichung (9) steht, wie die allgemeine Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen zu der Definition dieser Funktionen. In genau demselben Verhältnis zu der Ungleichung (11) steht die Ungleichung (3) für $q=1$, d. h. die Ungleichung

$$(14) \qquad \int_0^1 M_p^x(g(x, y))\, dy \leqq M_p^x\left(\int_0^1 g(x, y)\, dy\right).$$

Die Ungleichungen (13) und (14) sind also in Wirklichkeit nicht wesentlich allgemeiner als die Ungleichungen (9) und (11). Weiter ist es nun eine sehr leichte Aufgabe, aus den beiden Spezialfällen $p=1$ und $q=1$ die Ungleichung (3) für beliebige Exponenten p und q darzutun.

Der skizzierte Beweis zeigt deutlich die unmittelbare Verbindung zwischen der Ungleichung (3) und der Minkowskischen Ungleichung in der üblichen Form (10) und (12). Der Beweis besitzt aber einen bestimmten Nachteil, den er mit vielen anderen Beweisen auf diesem Gebiete gemein hat, nämlich daß er nicht geeignet ist, ohne Weiteres die genauen Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (3) zu liefern. Man wird sich deshalb einen Beweis wünschen, der sofort die Ungleichung (3) liefert, ohne den Weg über die Ungleichungen (10) und (12) zu nehmen, und der zugleich die Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens aufweist. Einen solchen Beweis werden wir unten geben.

Zuerst sei aber noch eine Bemerkung über die Ungleichung (3) eingeschoben, nämlich, daß auch die *Höldersche Ungleichung*, die aussagt, daß

(15) $$M_1(f_1 f_2) \leqq M_r(f_1)\, M_{\frac{r}{r-1}}(f_2)$$

für $r>1$, in dieser Ungleichung enthalten ist. Wählen wir nämlich $p=0$, $q=1$ und $g(x,y)=(f_1(y))^r$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{r}$, $g(x,y)=(f_2(y))^{\frac{r}{r-1}}$ für $\frac{1}{r}<x\leqq 1$, so ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$M_1\left(e^{\frac{1}{r}\log f_1^r + \frac{r-1}{r}\log f_2^{\frac{r}{r-1}}}\right) \leqq e^{\frac{1}{r}\log M_1(f_1^r) + \frac{r-1}{r}\log M_1\left(f_2^{\frac{r}{r-1}}\right)}$$

oder

$$M_1(f_1 f_2) \leqq [M_1(f_1^r)]^{\frac{1}{r}} \left[M_1\left(f_2^{\frac{r}{r-1}}\right)\right]^{\frac{r-1}{r}},$$

und das ist gerade die Ungleichung (15). Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f_1^r \big/ f_2^{\frac{r}{r-1}}$ konstant ist. Umgekehrt kann man nach dem obigen Muster aus der Ungleichung (15), übrigens auch schon aus dem Spezialfall $r=\frac{1}{2}$, d. h. aus der Schwarzschen Ungleichung, die Ungleichung (3) für den Fall $p=0$, $q=1$ herleiten. Dabei verliert man aber wieder die Möglichkeit einer einfachen Feststellung der Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

Zum Schluß bringen wir noch den angekündigten, direkten Beweis der Ungleichung (3).[5]) Als Ausgangspunkt nehmen wir eine bekannte Verallgemeinerung der Jensenschen Ungleichung (1).

Es seien $f = f(x)$ und $h = h(x)$ zwei im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen, die unseren gewöhnlichen Bedingungen genügen. Ferner sei

$$\int_0^1 h\,dx = 1.$$

Dann bezeichnen wir, falls $p \neq 0$, die Größe

$$M_p(f;\,h) = \left[\int_0^1 f^p \,.\, h\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

falls $p = 0$, die Größe

$$M_0(f;\,h) = e^{\int_0^1 \log f \,.\, h\,dx}$$

als Mittelwert p^{ter} Ordnung $M_p(f;\,h)$ von f *mit der Gewichtsfunktion* h. Dann gilt der Satz:

Bei fest gehaltenem h besteht dann und nur dann die Ungleichung

(16) $$M_p(f;\,h) \leq M_q(f;\,h)$$

für jede Funktion f der betrachteten Art, wenn $p \leq q$ *ist. Ferner gilt in der Ungleichung* (16) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder* $p = q$, *oder* $p < q$ *und f konstant ist.*[6])

Aus diesem Satz ziehen wir eine wichtige Folgerung:

Es sei $p < q$ *und* f_0 *eine vorgegebene Funktion, die unsere gewöhnlichen Bedingungen erfüllt. Dann gibt es immer eine Konstante a und eine Gewichtsfunktion h, so daß*

$$M_p(f) = a\,M_q(f;\,h),$$

sobald f/f_0 *konstant ist, während für alle anderen Funktionen f die*

---

[5]) Bei der Ausarbeitung dieses Beweises habe ich den Beweis für die Minkowskische Ungleichung von F. Riesz vor Augen gehabt; vgl. F. Riesz, Su alcune disuguaglianze, *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, 7 (1928), S. 77—79. Unser Beweis ist eigentlich nur eine weitere Ausgestaltung dieses Beweises.

[6]) Vgl. J. L. W. V. Jensen oder B. Jessen, loc. cit., Fußnote [2]). — Die Ungleichung (16) folgt übrigens unmittelbar aus der Ungleichung (1) durch eine einfache Variabeltransformation.

Ungleichung

$$M_p(f) < a M_q(f;\, h)$$

besteht.[7])

Bei dem Beweis dieses Satzes dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M_p(f_0) = 1$ annehmen. Dann erfüllt offenbar die Funktion f_0^p die Bedingung

$$\int_0^1 f_0^p\, dx = 1\,;$$

denn für $p \neq 0$ folgt dies unmittelbar aus der Voraussetzung $M_p(f_0) = 1$, und für $p = 0$ ist ja f_0^p konstant $= 1$. Also gilt nach der obigen Ungleichung (16) für jedes f die Ungleichung

$$M_p\left(\frac{f}{f_0};\, f_0^p\right) \leqq M_q\left(\frac{f}{f_0};\, f_0^p\right), \tag{17}$$

und dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f/f_0 konstant ist. Nun steht auf der linken Seite von (17) gerade die Operation $M_p(f)$; dies ist trivial, wenn $p \neq 0$ und folgt für $p = 0$ aus der Voraussetzung $M_p(f_0) = 1$. Und auf der rechten Seite von (17) steht gewiß eine Operation der Form $a M_q(f;\, h)$; denn für $q \neq 0$ ist ja

$$M_q\left(\frac{f}{f_0};\, f_0^p\right) = \left[\int_0^1 \left(\frac{f}{f_0}\right)^q . f_0^p\, dx\right]^{\frac{1}{q}} = a M_q(f;\, h),$$

falls

$$h = \frac{f_0^{p-q}}{\int_0^1 f_0^{p-q}\, dx} \qquad \text{und} \qquad a = \left[\int_0^1 f_0^{p-q}\, dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

gesetzt wird, und für $q = 0$ ist

$$M_0\left(\frac{f}{f_0};\, f_0^p\right) = e^{\int_0^1 \log\frac{f}{f_0} . f_0^p\, dx} = a M_0(f;\, h),$$

falls

$$h = f_0^p \qquad \text{und} \qquad a = e^{-\int_0^1 \log f_0 . f_0^p\, dx}$$

gesetzt wird. Hiermit ist der Satz bewiesen.

[7]) Auf Grund dieses Satzes kann man sagen, daß für $p < q$ die Funktionaloperation $M_q(f)$ *konvex* ist in Bezug auf $M_p(f)$. Diese Konvexität ist der eigentliche Grund für das Bestehen der Ungleichung (3).

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun ein Leichtes, die allgemeine Ungleichung (3) zu beweisen. Es gilt zu zeigen, daß für jedes $g = g(x, y)$ die Ungleichung

$$(3) \qquad M_q^y M_p^x(g(x, y)) \leqq M_p^x M_q^y(g(x, y))$$

besteht, falls $p < q$, und ferner, daß in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $g(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ ist.

Wir wählen in dem obigen Satze

$$f_0(x) = M_q^y(g(x, y)),$$

und bestimmen zu dieser Funktion f_0 nach demselben Satze eine Zahl a und eine Gewichtsfunktion $h = h(x)$, so daß für jede Funktion $f = f(x)$

$$(18) \qquad M_p^x(f(x)) \leqq a M_q^x(f(x);\, h(x)),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn f/f_0 konstant ist. Dann gilt also insbesondere (für $f = f_0$) die Gleichung

$$(19) \qquad M_p^x M_q^y(g(x, y)) = a M_q^x(M_q^y(g(x, y));\, h(x)),$$

die die rechte Seite von (3) allein durch Mittelwerte q^{ter} Ordnung ausdrückt. Wenden wir andererseits für konstantes y die Ungleichung (18) auf die Funktion $f(x) = g(x, y)$ an, so ergibt sich die Ungleichung

$$(20) \qquad M_p^x(g(x, y)) \leqq a M_q^x(g(x, y);\, h(x)).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann für alle Werte von y, wenn $g(x, y)/f_0(x)$ nur von y abhängt, d. h. also, wie man sich leicht überlegt, wenn $g(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ ist. Aus (20) folgt nun durch Mittelwertbildung q^{ter} Ordnung in Bezug auf die Variable y die Ungleichung

$$(21) \qquad M_q^y M_p^x(g(x, y)) \leqq M_q^y\, a M_q^x(g(x, y);\, h(x)),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn $g(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ ist. Nun sind aber die beiden auf den rechten Seiten von (19) und (21) stehenden Größen gleich; denn Mittelwertbildungen von der gleichen Ordnung sind unabhängig von ihrer Reihenfolge, auch wenn Gewichtsfunktionen auftreten. Also folgt aus (19) und (21) die zu beweisende Ungleichung (3).

(Eingegangen am 23. Dezember 1932.)